

WYMIAR FRAKTALNY W BIOLOGII I MEDYCYNIE – PRZEGLĄD STOSOWANYCH ALGORYTMÓW

EDWARD OCZERETKO

Instytut Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku, 15-887 Białystok, ul. Sosnowa 64

Many biological and medical objects seems to have fractal structure. A basic characteristic of such objects is their fractal dimension. In the paper, some methods of fractal dimension estimation are presented.

WSTĘP

Termin fraktal (łac. *fractus* – połamany) został wprowadzony przez Mandelbrota (Mandelbrot, 1983) dla określenia figur geometrycznych przypominających kształty znajdujące w naturze. Fraktal jest tworem geometrycznym, którego charakterystyczną właściwością jest samopodobieństwo – jego nawet bardzo mikroskopijne fragmenty są podobne do całej figury. Przykładowo drzewo można uznać za fraktal, ponieważ z daleka wygląda podobnie jak gałąź będąca jego częścią. Wyrastające z większych gałęzi małe gałązki są również podobne do całego drzewa. Dla obiektów spotykanych w przyrodzie, część nie może być dokładną kopią całości – mamy tu o czynienia z samopodobieństwem statystycznym.

Podstawowym pojęciem teorii fraktali jest wymiar fraktalny D . Za pomocą tego wymiaru określamy stopień złożoności różnego rodzaju obiektów (matematycznych, geometrycznych, biologicznych, fizycznych) czy procesów. Najważniejszą właściwością D jest to, że może on przyjmować wartości niecałkowite (ułamkowe). Odróżnia to go od wymiaru topologicznego T przyjmującego wartości całkowite. Poprawna matematycznie ścisła definicja wymiaru topologicznego, mimo, że intuicyjnie pojęcie to wydaje się bardzo proste, została podana dopiero w latach 20 naszego stulecia. Do dalszych rozważań wystarczy nam w zupełności intuicyjne rozumienie tego wymiaru. Poglądowo idee wymiarów T i D przedstawiono na rycinie 1 opracowanej wg Tsonis & Tsonis (1987). Zbiór punktów tworzących linię posiada wymiar topologiczny $T = 1$, nie w tym przypadku znaczenia jak bardzo złożony jest wzór. Podobnie wymiar topologiczny powierzchni zawsze wynosi 2. To tradycyjne podejście nie dostarcza żadnej informacji na temat stopnia nieregularności, czy rozczłonkowania danej figury. Linia prosta cha-

rakteryzuje się wymiarem fraktalnym równym jedności. Jednak im bardziej złożony kształt, tym większa wartość wymiaru fraktalnego. Dla bardzo złożonej linii narysowanej na płaszczyźnie $D \rightarrow 2$, natomiast dla linii w przestrzeni trójwymiarowej $D \rightarrow 3$. Wymiar powierzchni fraktalnej zawiera się między 2 a 3. Podsumowując wymiar fraktalny będący miarą złożoności obiektu pozwala precyzyjniej rozróżniać figury niż wymiar topologiczny. Wymiar fraktalny jest miarą stopnia, w jakim dany obiekt wypełnia przestrzeń.

WYMIAR HAUSDORFFA

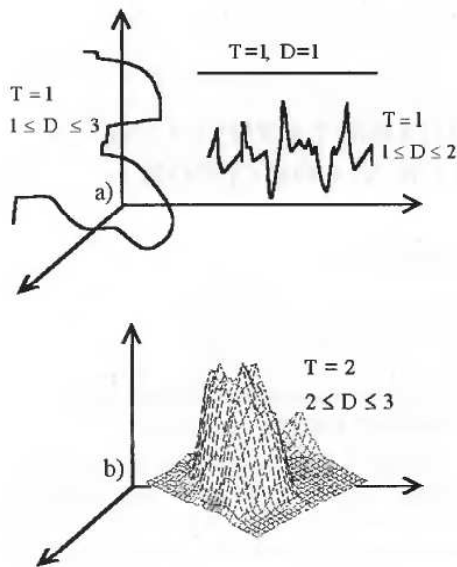
W 1919 Hausdorff wprowadził koncepcję wymiaru o wartościach niecałkowitych, obecnie zwanego wymiarem Hausdorffa, lub wymiarem fraktalnym (Hausdorff, 1919). Określmy średnicę zbioru M będącego podzbiorem przestrzeni R^n jako:

$$\text{diam}(M) = \sup\{d(x, y), x, y \in M\} \quad (1)$$

gdzie \sup jest kresem górnym zbioru, natomiast d jest metryką. Niech A_i będzie przeliczalnym, otwartym pokryciem zbioru M oraz $\varepsilon_i = \text{diam}\{A_i\} \leq \delta$. Oznaczmy przez $H_H^\lambda(\delta)$ kres dolny brany po wszystkich otwartych pokryciach zbioru M :

$$H_H^\lambda(\delta) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^\lambda = \inf \left(\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^\lambda \right), \lambda > 0 \quad (2)$$

Infimum w powyższym wzorze jest brane po wszystkich takich pokryciach dla których zbory pokrywające mają średnicę mniejszą od δ . Dla każdego pokrycia bierzemy średnice, podnosimy



Ryc. 1. Wymiary topologiczny T i fraktalny D wybranych figur geometrycznych: a) nie ma znaczenia jak bardzo poskręcana jest linia, jej wymiar topologiczny wynosi 1; b) wymiar topologiczny powierzchni zawsze wynosi 2. Stopień złożoności danego kształtu najlepiej opisuje wymiar fraktalny, który może przybierać wartości niecałkowite.

do potęgi λ i sumujemy. Hausdorff udowodnił, że granica $\lim_{\delta \rightarrow 0} H_H^\lambda(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\inf \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^\lambda)$ istnieje i dąży do nieskończoności jeżeli λ jest mniejsze od pewnej wartości krytycznej oznaczanej przez D_H . Jeżeli λ jest większe od D_H to $H_H^\lambda(\delta)$ dąży do zera. Wartość krytyczna D_H to wymiar Hausdorffa zbioru M .

Niestety definicja ta nie prowadzi do numerycznych zastosowań. Podstawową trudnością jest oszacowanie wielkości $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^\lambda$. Aby obliczyć wymiar Hausdorffa tylko w oparciu o definicję należałoby przeprowadzić obliczeniowo niewykonalne poszukiwania, pokrywając dany zbiór elementami różnego kształtu i wielkości, przechodząc w granicy z ich rozmiarem do wartości nieskończenie małych. Definicja ta jednak stanowi matematyczną podstawę różnych metod szacowania wymiaru fraktalnego. Niech, np. $N(\delta)$ będzie najmniejszą liczbą hipersześcianów o boku równym δ , którymi pokrywamy badany zbiór. Zastępując $\text{diam}(A_i)^\lambda$ przez δ^{D_H} mamy:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^\lambda = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \delta^{D_H} = N(\delta) \delta^{D_H} \quad (3)$$

gdzie $N(\delta) \propto \delta^{-D_H}$ i stąd wymiar pudełkowy D_B dany jest równaniem:

$$D_B = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\delta))}{\ln(1/\delta)} \quad (4)$$

Istnieje wiele algorytmów obliczania wymiaru fraktalnego. Z każdym z nich jest związany określony rodzaj wymiaru fraktalnego np. wymiar pudełkowy, cyrkłowy, spektralny itd. Dla wszystkich metod mamy do czynienia z zależnością potęgową między wybranymi parametrami:

$$M(\delta) = \text{const} \cdot \delta^\alpha \quad (5)$$

gdzie $M(\delta)$ jest wartością mierzoną, a δ skalą.

Zachodzi bezpośredni związek między wykładnikiem α a wartością D . Prawo potęgowe jest bezpośrednio związane z własnością samopodobieństwa.

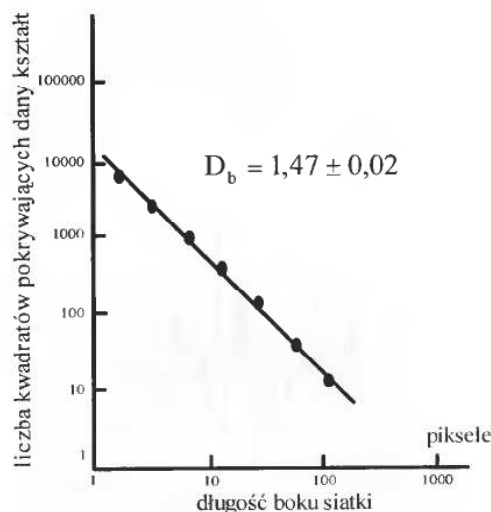
SZACOWANIE WYMIARU FRAKTALNEGO OBIEKTÓW W PRZESTRZENI R^2

Wybór metody obliczania wymiaru fraktalnego jest kwestią naszej wygody i rodzaju badanych danych. Ryc. 2 (opracowana wg Morse'a, Lawton, Dodson & Williamson, 1985) ilustruje metodę pudełkową. Mamy tu do czynienia z obrazem binarnym tzn. elementy macierzy obrazu przyjmują tylko dwie wartości 0 i 1. Algorytm ten możemy przedstawić następująco:

1. Badany obiekt pokrywamy siatką kwadratową o boku δ .
2. Liczymy oczka siatki zawierające elementy badanej figury otrzymując $N(\delta)$.
3. Zapamiętujemy liczby $N(\delta)$ i δ .
4. Powtarzamy punkty 1-3 dla kilku lub kilkunastu zmniejszających się wartości δ .
5. Na osi rzędnych odkładamy $\log N$, a na osi odciętych $\log \delta$ otrzymując tzw. „wykres fraktalny”.
6. Nachylenie prostej regresji dla otrzymanych punktów jest związane bezpośrednio z pudełkowym wymiarem fraktalnym ($N(\delta) \sim \delta^{-D_B}$).



Ryc. 2. Szacowanie wymiaru fraktalnego metodą pudełkową.



Istnieją także inne algorytmy obliczania wymiaru fraktalnego tego typu obiektów w przestrzeni R^2 , a więc i wymiary z nimi związane takie jak (Baveye & Boast, 1998; Hastings & Sugihara, 1994; Losa, Merlini, Weibel & Nonnemacher, 1998): wymiar cyrkłowy, wymiar masowy, wymiar informacyjny, wymiar otrzymany przy zastosowaniu metody pole-obwód.

Opiszmy wymiar cyrkłowy. Jest on szczególnie użyteczny, jeżeli badamy krzywe o dużym stopniu złożoności np. brzeg komórki białaczki włochatej. Dla danej krzywej znajdujemy wielkość $N(r)$ wyrażającą ile razy można odłożyć na niej za pomocą cyrkla odcinek o długości r . Wtedy $(N(r) - 1)r$ jest długością tej krzywej, długością przy danym rozstawieniu r cyrkla. Przy zwiększeniu rozstawienia długość się zmniejsza, przy zmniejszeniu zwiększa, a więc między wielkościami $N(r)$ i r zachodzi następujące prawo potęgowe:

$$N(r) = C \cdot r^{-D_r} \quad (6)$$

gdzie D_r jest fraktalnym wymiarem cyrkłowym, C jest stałą.

Wymiar cyrkłowy brzegu liścia z ryciny 2 wynosi $D_r = 1,33 \pm 0,01$.

OBLICZANIE WYMIARU FRAKTALNEGO OBRAZÓW MEDYCZNYCH

Komputerową reprezentacją obrazu medycznego np. obrazu radiologicznego jest macierz obrazu,

gdzie stopnie szarości odpowiadające elementowi o współrzędnych x, y tworzą mniej lub bardziej skomplikowaną powierzchnię, której kształt daleki jest od gładkości. Opisane powyżej metody nie są odpowiednie do tego typu danych, chyba, że badany obraz poddany procesowi binaryzacji.

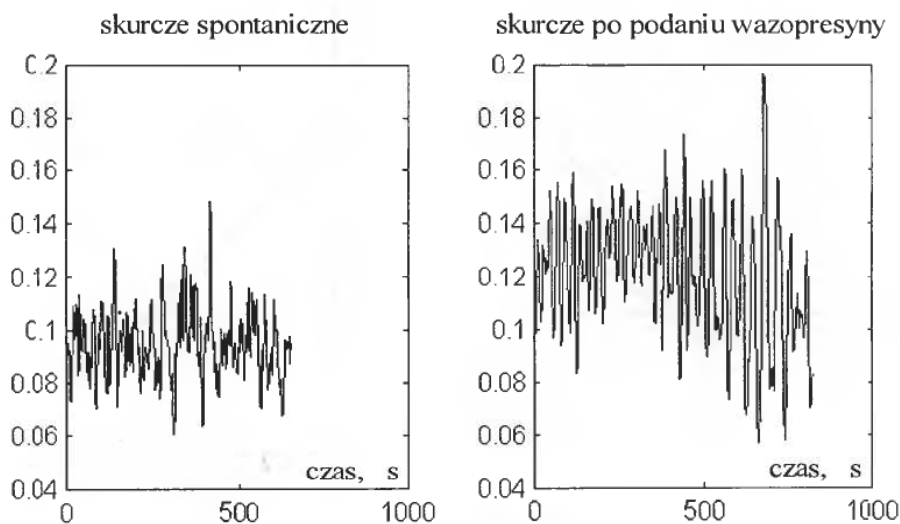
Mandelbrot zauważył, że powierzchnie występujące w przyrodzie można traktować jako wynik błędzenia przypadkowego (Mandelbrot & Van Ness, 1968). Ułamkowy (fraktalny) wielowymiarowy ruch Browna FBM (Fractional Brownian Motion) jest odpowiedzialny za ich ukształtowanie. Koncepcja ta znalazła szerokie zastosowanie w analizie obrazów medycznych (Chen, Daponte & Fox, 1989).

Funkcja losowa $\Phi(x)$ jest fraktalną funkcją Browna (ułamkową funkcją Browna) jeżeli dla każdego x i Δx :

$$P\left(\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{|\Delta x|^H} < y\right) = F(y) \quad (7)$$

gdzie $F(y)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej, natomiast H to współczynnik Hursta ($0 < H < 1$). Oczywiście x i Δx mogą być rozumiane jako wektory, co prowadzi do rozszerzenia definicji na obiekty o wymiarze topologicznym równym i większym od 2.

Między współczynnikiem Hursta a wymiarem fraktalnym zachodzi następujący związek:



Ryc. 3. Sygnały aktywności skurczowej macicy (ilość próbek 4096, częstota próbkowania 5Hz)

$$D = T + 1 - H \quad (8)$$

Obliczając wymiar fraktalny powierzchni metodą spektralną korzystamy z zależności, że dla izotropowej powierzchni $f(x, y)$ wyznaczonej fraktalną funkcją Browna spektrum mocy $P(u, v)$ jest proporcjonalne do radialnej częstotliwości $\rho = (u^2 + v^2)^{1/2}$ (Dennis & Dessipris, 1989), czyli:

$$P(u, v) = C \left((u^2 + v^2)^{1/2} \right)^{-\hat{a}} = C \hat{\rho}^{-\hat{a}}, \text{ gdzie } \hat{a} > 0. \quad (9)$$

Algorytm wyznaczania wymiaru fraktalnego

metodą spektralną można więc zapisać w postaci:

1. obliczamy spektrum mocy $P(u, v)$ dla danej macierzy obrazu,
2. obliczamy $P(\rho)$ korzystając z poniższego wzoru (uśredniając wartości $P(u, v)$ w koncentrycznych pierścieniach

$$P(\rho) = \frac{\int P(u, v) du dv}{2\pi \Delta \rho} \quad (10)$$

3. obliczamy β z nachylenia prostej regresji $\log(P(\rho))$ w funkcji $\log(\rho)$,
4. obliczamy wymiar fraktalny D korzystając z wzoru $D = 3 - \beta/2$

Inne metody szacowania wymiaru fraktalnego

Tabela 1. Wyniki analizy fraktalnej sygnałów czynności skurczowej macicy.

Metoda	Skurcze spontaniczne	Skurcze po podaniu wazopresyny
Analiza R/S	$D = 1.43 \pm 0.02$	$D = 1.21 \pm 0.06$
Metoda RL	$D = 1.42 \pm 0.01$	$D = 1.18 \pm 0.05$
Metoda spektralna	$D = 1.47 \pm 0.09$	$D = 1.30 \pm 0.08$
Metoda VM	$D = 1.38 \pm 0.02$	$D = 1.20 \pm 0.02$
Metoda falkowa	$D = 1.46 \pm 0.05$	$D = 1.30 \pm 0.05$
Metoda RD	$D = 1.36 \pm 0.04$	$D = 1.16 \pm 0.03$
Metoda Higuchi'ego	$D = 1.48 \pm 0.04$	$D = 1.29 \pm 0.04$
Metoda wykorzystująca różnice intensywności	$D = 1.44 \pm 0.01$	$D = 1.22 \pm 0.02$

obrazów to m.in. metoda wykorzystująca modelowanie powierzchni za pomocą prostopadłości, metoda wykorzystująca różnice intensywności, algorytmy oparte na morfologii matematycznej, czy metody wykorzystujące transformatę falkową (Caldwell, Moran & Bogoch, 1998; Chen *et al.*, 1989; Nieniewski, 1998; Mallat, 1989).

WYMIAR FRAKTALNY SZEREGÓW CZASOWYCH

W przypadku szeregów czasowych nie możemy mówić o samopodobieństwie lecz o tzw. samoafinitywności. Jak wiadomo samopodobieństwo jest związane z faktem, że kształt (wzór) jest identyczny po operacjach powiększania czy pomniejszania (możemy dokonywać tu przesunięć czy obrotów). Dla szeregów czasowych na osiach współrzędnych x , y występują różne wielkości, a więc osie muszą być skalowane w różnym stosunku.

Zamiast opisywać poszczególne algorytmy podamy wyniki analizy fraktalnej sygnałów przedstawiających czynność skurczową macicy dla skurczów spontanicznych i skurczów po podaniu wazopresyny (ryc. 3). Sygnały zarejestrowano w Zakładzie Patofizjologii Ciąży Akademii Medycznej w Białymstoku. Zastosowane metody to (Bassingthwaight & Raymond, 1994b; Gallant, Moore Hutchinson & Gressler, 1994; Bassingthwaight, Liebovitch & West, 1994a; Higuchi, 1990; Akay & Mulder, 1998):

- analiza przeskalowanego zakresu (analiza R/S);
- metoda RL (roughness-length) - oparta na definicji pojęcia nieregularności;
- metoda spektralna - oparta na szybkiej transformacji Fouriera;
- metoda VM (variogram method) - wykorzystująca tzw. wariancję przyrostów;
- metoda falkowa;
- metoda RD (relative dispersion - względnej dyspersji);
- metoda Higuchi'ego;
- metoda oparta na różnicach intensywności.

Rezultaty przedstawiono w tabeli 1. Mamy do czynienia z różnicami w wartościach wymiaru fraktalnego dla różnych metod. Jednak wyniki porównania tych dwóch sygnałów są niewątpliwie logiczne.

W tym miejscu należy wspomnieć o badaniu własności chaotycznych szeregów czasowych. Jedną z wielu metod jest obliczanie wymiaru fraktalnego atraktora. Wymiar fraktalny atraktora w przestrzeni fazowej jest oczywiście czymś innym niż wymiar fraktalny sygnału z którego rekonstruujemy ten atraktor. Jeżeli znajdziemy ni-

sko-wymiarowy atraktor w przestrzeni fazowej, oznacza to, że badany szereg czasowy może być generowany przez deterministyczny związek. Stosujemy tu wymiar pudełkowy i wymiar korelacyjny (Kruger, 1996; Grassberger & Procaccia, 1983).

MULTIFRAKTALE.

Multifraktale (Feder, 1988) różnią się od fraktali dwiema charakterystycznymi cechami:

1. Pojęcie to oparte jest nie na zbiorach lecz na miarach z tymi zbiorami związanymi.
2. W wyniku pomiarów otrzymujemy nie pojedynczą wartość wymiaru fraktalnego lecz spektrum wymiarów D_q , przedstawione w formie wykresu D_q w funkcji q . Miary multifraktalne charakteryzuje widmo wymiaru D_q . Analiza multifraktalna różni się więc zasadniczo od obliczania „zwyčajnego” wymiaru fraktalnego. Zastosowano ją m. in. do analizy kształtu komórek nerwowych (Smith, Lange & Marks, 1996).

UWAGI KOŃCOWE

Duża liczba algorytmów służących do szacowania wymiaru fraktalnego wynika z faktu, że matematycznie ścisła definicja tego wymiaru, definicja Hausdorffa nie nadaje się do praktycznych zastosowań. Stąd też cała mnogość metod i nieuniknione różnice w wynikach uzyskiwanych przy ich pomocy (Oczeretko, Rogowski & Jurgilewicz, 1998). Daje to jednak możliwość wyboru metody odpowiedniej do naszych danych.

LITERATURA

- Akay M. & Mulder E. J. (1998). Effects of maternal alcohol intake on fractal properties in human fetal breathing dynamics. *IEEE Trans Biomed. Engn.* **45**, 1097-1103.
- Baveye P. & Boast C.W. (1998). Fractal geometry, fragmentation processes and the physics of scale-invariance: an introduction. W: P. Baveye, J.-Y. Parlange, B.A. Stewart. *Fractals in soil science*. CRC Press. 1-54.
- Bassingthwaight J.B., Liebovitch I.S. & West B.J. (1994a). *Fractal physiology*. Oxford University Press. New York, Oxford.
- Bassingthwaight J.B. & Raymond G.M. (1994b). Evaluating rescaled range analysis for time series. *Annals of Biomed. Engn.* **22**, 432-444.
- Caldwell C.B., Moran E.L. & Bogoch E.R. (1998). Fractal dimension as a measure of altered trabecular

- bone in experimental inflammatory arthritis. *J. Bone Miner. Res.* **13**, 978-985.
- Chen C.C., Daponte J.S. & Fox M.D. (1989). Fractal feature analysis and classification in medical imaging. *IEEE Trans. Med. Imaging*, **8**, 133-142.
- Dennis T.J. & Dessipris N.G. (1989). Fractal modelling in image texture analysis. *IEE Proc-F*, **136**, 227-235.
- Feder J. (1988). *Fractals*. New York, Plenum Press, 1988.
- Gallant J.C., Moore I.D. & Hutchinson M.F., Gressler P. (1994). Estimating fractal dimension of profiles: A comparison of methods. *Math. Geol.* **26**, 455-481.
- Grassberger P. & Procaccia I. (1983). Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346-349.
- Hastings H.M. & Sugihara G. (1994). *Fractals, a user's guide for the natural science*. Oxford University Press. Oxford. New York. Tokyo.
- Hausdorff F. (1919). Dimension and äusseres mass. *Math. Ann.* **79**, 157-179.
- Higuchi T. (1990). Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series: a numerical investigation. *Physica D*, **46**, 254-264.
- Kruger A. (1996). Implementation of a fast box-counting algorithm. *Comp. Phys. Comm.* **98**, 224-234.
- Losa G.A., Merlini D., Weibel E.R. & Nonnemacher Th. (1998). *Fractals in biology and medicine*. Volume II. Birkhäuser.
- Mallat S.G. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* **11**, 674-693.
- Mandelbrot B.B. & Van Ness J.W. (1968). Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, **10**, 422-437.
- Mandelbrot B.B. (1983). *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman, New York.
- Morse D.R., Lawton J.H., Dodson M.M. & Williamson M.H. (1985). Fractal dimension of vegetation and the distribution of arthropod body lengths. *Nature*, **314**, 731-733.
- Nieniewski M. (1998). *Morfologia matematyczna w przetwarzaniu obrazów*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ. Warszawa.
- Oczeretko E., Rogowski F. & Jurgilewicz D. (1998). Fractal analysis of nuclear medicine scans. [In:] G. A. Losa, D. Merlini, E.R. Weibel, Th. Nonnemacher. *Fractals in Biology and Medicine*. Volume II., Birkhäuser, 326-334.
- Smith Jr., T.G., Lange G. D. & Marks W.B. (1996). Fractal methods and results in cellular morphology dimensions, lacunarity and multifractals. *J. Neurosci. Methods*, **69**, 173-180.
- Tsonis A.A & Tsonis P.A. (1987). Fractals: a new look at biological shape and patterning. *Perspect. Biol. Med.* **30**, 355-361.