

Wojciech Daniel

TEORIA INFORMACJI A MODELOWANIE SIECI NEURONOWYCHI. STOCHASTYCZNY MODEL SIECI NEURONOWEJ1. WSTĘP

Pojęcia, takie jak informacja, procesy informacyjne towarzyszą nieodłącznie wszelkim próbom zrozumienia i wyjaśnienia funkcjonowania układu nerwowego, a w szczególności mózgu ludzkiego. Rzeczywiście, na sieć nerwową można patrzeć jak na niezwykle złożony układ składający się z ok. 10^{10} - 10^{11} elementów, w którym dokonuje się selekcjonowanie, kojarzenie, magazynowanie napływającej ze środowiska informacji niezbędnej dla optymalnego sterowania organizmem. Z tego punktu widzenia, zadaniem teoretycznego badania układu nerwowego powinno być wyjaśnienie, w jaki sposób właściwości jego elementów składowych - neuronów oraz ich zasady oddziaływania i organizacji umożliwiają realizację wspomnianych procesów informacyjnych. By zadanie takie mogło być zrealizowane trzeba - na podstawie dostępnych danych doświadczalnych - zbudować taki model sieci nerwowej, który umożliwiłby wprowadzenie pojęć i aparatu matematycznego teorii informacji, a w konsekwencji sformułowanie teorii procesów informacyjnych układu nerwowego. Mówiąc - model sieci nerwowej - mam na myśli model matematyczny, tzn. pewną strukturę matematyczną wraz ze zbiorem reguł przyporządkowujących obiektom matematycznym znaczenie neurofizjologiczne. Aczkolwiek nie jest to miejsce na ogólne rozważanie metodologiczne, trzeba - celem uniknięcia nieporozumienia - podkreślić, że budowa modelu matematycznego pociąga za sobą nieuchronnie konieczność abstrahowania od tych czynników, które - w danej sytuacji - nie są istotne. Wobec faktu, że - mimo dużych osiągnięć - aktualna wiedza neurofizjologiczna o mózgu człowieka, zwłaszcza w zakresie funkcjonowania dużych układów neuronów, jest jeszcze bardzo niepełna, konstruowanie modelu matematycznego jest zajęciem dość ryzykownym. Ryzyko jest tym większe, że układ 10^{10} neuronów tworzących mózg jest bez wątpienia najbardziej złożonym tak funkcyj-

nalnie jak i strukturalnie układem z jakim spotkać można się w przyrodzie, że zachodzący w nim komplekse zjawisk biochemicznych, bioelektrycznych, elektrochemicznych, elektrycznych i innych obejmuje poziomy od submolekularnego do makroskopowego włącznie. Stąd też konstruowanie modelu matematycznego może grozić, albo zbyt daleko idącym uproszczeniem, tak że model „straci kontakt” z rzeczywistością, albo tym, że model będzie zbyt specyficzny i tym samym zbyt skomplikowany i szczegółowy by umożliwić całościowy opis procesów informacyjnych.

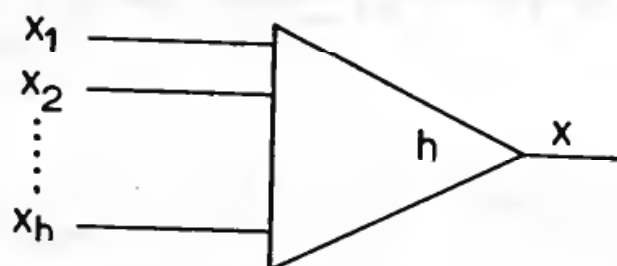
Ogólne zasady funkcjonowania mózgu człowieka, wypracowane na gruncie badań neurofizjologicznych, w znacznej mierze mają jeszcze charakter hipotez (por. [1]). Stąd też - mimo wszelkiego ryzyka - próba ich sformalizowania na gruncie w miarę ścisłego modelu matematycznego oraz teorii informacji powinna przynieść przynajmniej częściową odpowiedź na pytanie, o te właściwości struktury i funkcji mózgu, które decydują o procesach informacyjnych, które z kolei znajdują wyraz w złożonych wzorach zachowania się i aktywności. Tym samym poprzez odniesienie do wzorów zachowania może to stanowić pewną próbę weryfikacji przyjmowanych ogólnych zasad funkcjonowania mózgu.

Praca niniejsza nie rości sobie pretensji do wyczerpania powyższego zagadnienia. Celem jej jest zaproponowanie - na podstawie pewnych przesłanek neurofizjologicznych zebranych w rozdziale 3 - modelu matematycznego sieci neuronowej, który może stanowić podstawę do wspomnianej wyższej teorii procesów informacyjnych w mózgu. Sformułowaniu tego modelu poświęcony jest rozdział 4. Podstawowym rezultatem pracy jest wniosek, że sieć stochastyczna może być traktowana jako automat probabilistyczny. Wniosek ten jest pewnym uogólnieniem analogicznego twierdzenia podanego przez A r b i b a, mówiącego, że sieć deterministyczna jest równoważna automatu skończonemu.

2. DETERMINISTYCZNA SIEĆ NEURONÓW FORMALNYCH

Jak zostało powiedziane na wstępie, teoretyczne badanie układu nerwowego opiera się na konstruowaniu modeli matematycznych. Należy - za H a r m o n e m i L e w i s e m [2] - zwrócić uwagę na fakt, iż modelowanie takie może zmierzać w dwóch różnych kierunkach. W pierwszym z nich chodzi głównie o przedstawienie zjawisk fizjologicznych związanych bądź z pojedynczym neuronem, bądź z zespołami neuronów. Drugi kierunek - w ramach którego mieści się i niniejsza

praca - ma na celu badanie specyficznych właściwości układu nerwowego, wynikających z jego struktury sieciowej. W wykorzystywanych tutaj modelach - celem umożliwienia efektywnego badania właściwości sieciowych - reprezentacje właściwości pojedynczego neuronu ogranicza się do niezbędnego minimum, przyjmując różne wersje tzw. neuronu formalnego. W swojej „klasycznej” postaci model ten został podany w 1943 r. przez McCullocha i Pittsa [3], którzy wykazali, że sieć złożona z takich neuronów może realizować wszystkie funkcje logiczne. Jak się okaże dalej „neuron” ten jest rzeczywiście rezultatem dość drastycznego uproszczenia (por. [1, 4]), tym niemniej, badając sieci złożone z takich elementów uzyskano ostatnio wiele interesujących rezultatów (por. [5-7]). Model sieci złożonej z neuronów formalnych tzw. deterministyczna sieć neuronowa będzie też punktem wyjścia do sformułowania modelu stochastycznego. Neuron formalny jest to element progowy posiadający właściwość tzw. sumowania przestrzennego (rys. 1). Zakładamy, że ma on n wejść $x_1, \dots, x_n$, z których każde cechuje się określoną wagą synaptyczną w_i , $i = 1, \dots, n$, $w_i \in R$. Neuron formalny ma ponadto jedno wyjście x . Wejścia neuronu formalnego są analogami synaps, tj. obszarów połączeń dendrytów neuronu z aksonami innych neuronów, natomiast wyjście jest analogiem aksonu. Niech 1 oznacza pojawienie się sygnału na jednym z wejść lub na wyjściu neuronu, 0 niech oznacza brak sygnału. Neuron formalny generuje w chwili t sygnał na



Rys. 1. Schemat neuronu formalnego

wyjściu x , jeżeli w chwili $t-1$ potencjał postsynaptyczny $\sum_i w_i x_i$ przewyższał pewną wartość h , zwaną progiem neuronu. Zakładamy przy tym, że neuron formalny pracuje wg dyskretnej ekali czasu. Mamy więc:

$$x_{t+1} = \varphi \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i - h \right),$$

gdzie:

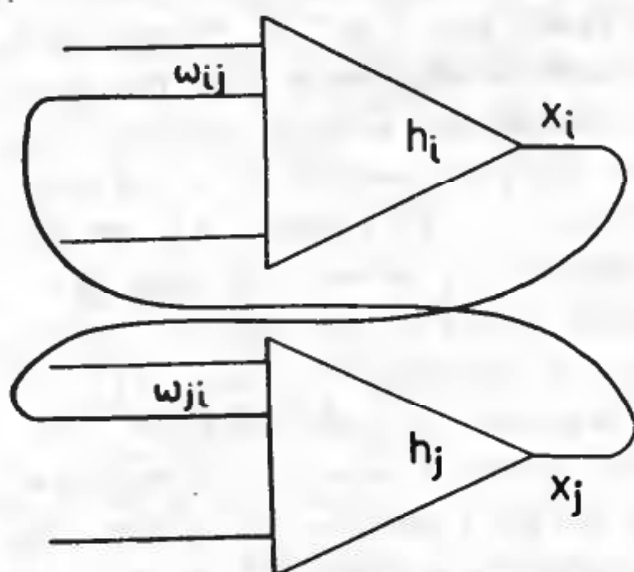
$$w_i \in R, \quad h \in R$$

oraz

$$\varphi(\lambda) = 0 \quad \lambda \leq 0$$

$$\varphi(\lambda) = 1 \quad \lambda > 0$$

Model ten - jak wspomnieliśmy - nie uwzględnia bardzo wielu cech rzeczywistego neuronu, takich jak: właściwość sumowania czasowego, okres odporności, ciągły czas i inne (por. [1, 4]). W ogólności również parametry neuronu, tj. próg i wagi synaptyczne, nie muszą być stałe w czasie. W dalszym ciągu rozważymy sieć neuronów formalnych, czyli układ składający się z dużej liczby N neuronów formalnych, wzajemnie ze sobą połączonych, działających zgodnie z tą samą dyskretną skalą czasu (rys. 2). Sieć taką można traktować jako model pewnego fragmentu układu nerwowego. Wyjście i -tego



Rys. 2. Połączenia między neuronami formalnymi w sieci neuronowej

go neuronu będziemy oznaczać przez x_i , próg przez h_i , w_{ij} niech będzie wagą z jaką wyjście i -tego neuronu połączone jest z j -tym wejściem i -tego neuronu. Gdy połączenia takiego nie ma, kładziemy $w_{ij} = 0$. Stan wyjścia i -tego neuronu (krótko: stan i -tego neuronu) w chwili t jest określony przez stany wszystkich N neuronów w chwili $t-1$:

$$x_i(t) = \varphi\left(\sum_{j=1}^N w_{ij} x_j(t-1) - h_i\right). \quad (2.1)$$

Stanem sieci w chwili t nazywać będziemy wektor (kolumnowy):

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} := \bar{x}(t).$$

Zauważmy, że zachowanie się w czasie stanu sieci jest całkowicie określone poprzez zbiór N^2 wag synaptycznych oraz N wartości progów, razem przez $N^2 + N$ parametrów. N^2 wag synaptycznych tworzy macierz $N \times N$, $(w)_{ij} := w_{ij}$, którą nazywać będziemy macierzą sieci.

Wektor $\bar{h} := \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix}$ nazywać będziemy wektorem progowym.

Para $\mathcal{J} = (W, \bar{h})$ określa więc całkowicie zachowanie się w czasie (izolowanej) sieci. Można napisać:

$$\bar{x}(t+1) = \varphi(W\bar{x}(t) - \bar{h}), \quad (2.2)$$

gdzie zakładamy, że funkcja φ działa na każdy element wektora $W\bar{x}(t) - \bar{h}$. Dla dalszych celów dogodnie będzie traktować zbiór parametrów jako ciąg $N^2 + N$ liczb rzeczywistych:

$$\mathcal{J} = (w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1N}, w_{21}, \dots, w_{NN}, h_1, \dots, h_N).$$

Zbiór wszystkich takich ciągów tworzy przestrzeń parametrów Γ .

Oczywiście $\Gamma \cong R^{N^2 + N}$. Ponieważ zmiana stanu określona równaniem (2.1) jest zadana przez pewien punkt $\mathcal{J} \in \Gamma$, możemy określić nieliniowy operator: $T_{\mathcal{J}} : X \rightarrow X$, gdzie X oznaczyliśmy zbiór stanów sieci, tzn. zbiór wszystkich zero-jednakowych ciągów N elementowych. X zawiera 2^N różnych elementów. Mamy więc:

$$\bar{x}(t+1) = T_{\mathcal{J}} \bar{x}(t), \quad (2.3)$$

dla każdego $\mathcal{J} \in \Gamma$.

O ile parametry sieci nie zmieniają się w czasie, to można napisać:

$$\bar{x}(t) = T_{\mathcal{J}}^t \bar{x}(0), \quad (2.4)$$

gdzie $\bar{x}(0)$ jest pewnym stanem początkowym. W ogólnym przypadku nie ma jednak podstaw by zakładać, że parametry sieci są wielkością stałą w czasie.

W ogólnym przypadku stan sieci w danej chwili t można więc przedstawić jako parę:

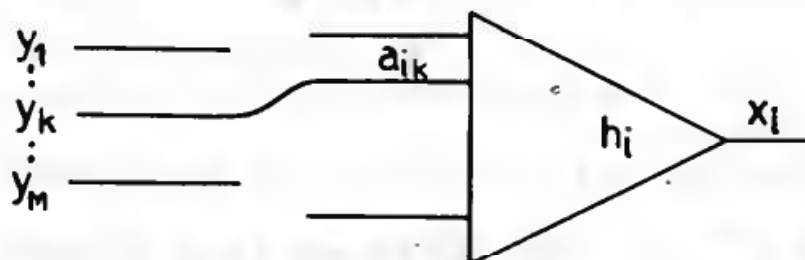
$$(\mathcal{J}(t), \bar{x}(t)). \quad (2.5)$$

Wolno przy tym założyć, że zmiany w czasie parametrów - z uwagi na fakt, iż są to zmiany strukturalne sieci - są znacznie wolniejsze niż zmiany stanu $\bar{x}$, które są zmianami czynnościowymi.

Widzimy więc, że w takim ogólnym przypadku sieć może być rozumiana jako układ adaptacyjny [8]. Parametry $\mathcal{J}$ odgrywają rolę para-

metrów adaptacyjnych, przyetoeowujących się, a zarazem determinują aktywność układu na poziomie funkcjonalnym.

Dotychczas rozważyliśmy sieci izolowane, tj. sieci nie podlegające żadnym impulsom zewnętrznym. Obecnie podamy opie oddziaływania sieci neutronowej z otoczeniem, tj. z podobnymi sieciami. Niech sygnały wejściowe dochodzą do sieci poprzez M linii ($M \times N$) $y_1 \dots y_M$, z których k -ta jest połączona z i -tym neuronem z wagą a_{ik} (rys. 3).



Rys. 3. Połączenia linii wejściowych z neuronami sieci

Dla i -tego neuronu mamy więc:

$$\bar{x}(t+1) = \varphi\left(\sum_{j=1}^N w_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^M a_{ik} y_k(t) - h_i\right). \quad (2.6)$$

Wektory $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_M(t) \end{pmatrix}$ nazywa się wektorem (stanem) wejściowym,

a macierz $M \times N$ współczynników a_{ij} - A macierzą wejścia.

Ostatecznie równanie na zmianę stanu przy uwzględnieniu sygnału zewnętrznego ma postać:

$$\bar{x}(t+1) = \varphi(W\bar{x}(t) + A\bar{y} - \bar{h}). \quad (2.7)$$

Wyjście sieci definiuje się jako K linii ($K \leq N$) wyprowadzonych z wyjść K spośród N neuronów sieci, po jednej linii z każdego wyjścia.

Stanem wyjścia $\bar{x}$ nazywamy stan K neuronów, z których wyprowadzono linie wyjściowe. Czyli $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_K} \end{pmatrix}$, gdzie $i_p = 1, \dots, N$, $p = 1, \dots, K$.

Zauważmy, że istnieją tylko skończone liczby stanów wejścia i wyjścia, równe odpowiednio 2^M i 2^K . Z powyższych uwag wynika, że dla każdego parametru $\bar{p} \in \Gamma$, sieć neuronowa jest automatem skończonym. Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne [9]: dla każdego

automatu skończonego można skonstruować odpowiadającą mu sieć neuronową. Przez automat skończony rozumiemy ([14], por. też [9]) pięciosłamentowy układ $A = (Y, Z, X, \delta, \lambda)$, gdzie Y, Z, X są odpowiednio skończonymi zbiorami wejść, wyjść i stanów wewnętrznych, zaś

$$\begin{aligned} \delta : X \times Y &\longrightarrow X & \delta(x(t), y(t)) &= x(t+1) \\ \lambda : X &\longrightarrow Z & \lambda x(t) &= z(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

są odpowiednio funkcjami następnego stanu i następnego wyjścia. Zakłada się, że automat działa w dyskretnej skali czasu. W naszym przypadku $X := \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2^N}$, $Y := \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{2^M}$, $Z := z_1 \dots z_{2^k}$ oraz

$$\begin{aligned} \delta(\bar{x}, \bar{y}) &= \varphi(W\bar{x} + A\bar{y} - \bar{h}), \\ \lambda(\bar{x}) &= B\bar{x}, \text{ gdzie } \bar{x} \in X, \bar{y} \in Y. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wygodnie jest zapisać powyższe związki w postaci macierzy przejść $P(y) = (p_{ij})(\bar{y})$, $i, j = 1 \dots 2^N$, $\bar{y} \in Y$, gdzie

$$p_{ij}(\bar{y}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \delta(\bar{x}_i, \bar{y}) = \bar{x}_j \\ 0 & \text{gdy } \delta(\bar{x}_i, \bar{y}) \neq \bar{x}_j \end{cases} \quad (2.10)$$

W macierzy $P(y)$ każdy wiersz zawiera jeden element równy jedności, a pozostałe elementy wiersza są równe zeru. Macierz taka określa przy ustalonym y zmianę stanu w sposób następujący: jeżeli w chwili t sieć znajdowała się w stanie $\bar{x}_j$, to w chwili $t+1$ będzie znajdowała się w stanie $\bar{x}_i$, takim dla którego $p_{ij} = 1$ (por. [14]). Tak więc zadanie sieci deterministycznej, lub co na jedno wychodzi automatu skończonego, jest równoważne zadaniu rodziny macierzy przejść $P(y)$, $y \in Y$.

Uwaga: w dalszym ciągu stany sieci, jak również wejścia i wyjścia będziemy oznaczali odpowiednio x, y, z z indeksem u dołu, gdy będzie chodziło o pewien stan ustalony. Gdy będzie chodziło o podkreślenie stanów pojedynczych neuronów w stanie x , będziemy stosowali index u góry, np. x^i , $i = 1, \dots, N$.

Z makroskopowego punktu widzenia można interesować się nie tyle dokładnym stanem sieci w danej chwili, ile pewną wielkością makroskopową cechującą ten stan. Dlatego też definiuje się [6] aktywność sieci jako:

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^i. \quad (2.11)$$

Oczywiście $0 \leq \mathcal{A}(x) \leq 1$. Tak określona wielkość jest funkcją określoną na zbiorze stanów, cechującą populację neuronów wzbudzonych.

3. DANE NEUROFIZJOLOGICZNE

Nasuwa się pytanie, czy przedstawiony wyżej model sieci, złożonej z tak prymitywnych w porównaniu z rzeczywistym neuronem elementów może mieć znaczenie w badaniu układu nerwowego. Przytoczmy najpierw kilka wniosków wynikających z badań doświadczalnych (wg [1])

1. W całym układzie nerwowym wszelkie przekazywanie bodźców (informacji) odbywa się za pośrednictwem impulsów nerwowych, powstających na zasadzie „wszystko albo nic”. Natężenie (intensywność bodźca) kodowane jest w częstotliwości. Neuron generuje impuls, (spike, potencjał czynnościowy), gdy pobudzenie w obrębie synaps osiągnie w krótkim czasie wartość przewyższającą wartość progową (sumowanie czasowe i przestrzenne). Nie wnikamy tutaj w złożoną naturę procesów elektrochemicznych zachodzących w obrębie synaps (por. [1, 4]). Istnieją również synapsy hamujące, których działanie blokuje neuron.

2. W połączeniach w obrębie mózgu obowiązuje zasada dywergencji, zgodnie z którą każdy neuron za pośrednictwem rozgałęzień aksonu może pobudzić duże ilości synaps na innych neuronach oraz zasada konwergencji stanowiąca, że wszystkie neurony posiadają synapsy pochodzące od wielu innych neuronów. Liczba synaps na jednym neuronie może wahać się w granicach $10 \sim 10^4$.

3. W mózgu neurony prawie zawsze wyładowują się spontanicznie, tworząc swoisty szum. Stąd też sieć neuronów w mózgu jest tak zorganizowana, że umożliwia zawsze „wyłowienie” właściwej informacji. Dla wyniesienia właściwych procesów informacyjnych ponad poziom szumów, neurony tek w obszarach recepcyjnych mózgu jak i innych działają kolektywnie, w sposób w dużej mierze równoległy.

4. Kora mózgowa zarówno w obszarach recepcyjnych jak i w pozostałej części ma strukturę kolumnową (por. też [10]). Znaczy to, że można wyodrębnić w niej grupy neuronów z ogromną ilością połączeń wewnętrznych, w których znajdują się neurony różnych rodzajów.

W obszarach recepcyjnych grupy takie otrzymują bodźce z pojedynczych włókien aferentnych (kierunek od receptorów), i dzięki działaniu kolektywnemu dokonują niejako ich wzmocnienia. Grupy takie oddziałują ze sobą za pośrednictwem włókien asocjacyjnych oraz bocznych włókien hamujących (hamowanie lateralne). Ponadto w obrębie kory motorycznej - z kolumn wychodzą włókna eferentne, niosące impulsy do receptorów. Omawiane grupy (kolumny) zawierają średnio ok. 10^5 neuronów, jest ich łącznie w mózgu ok. 10^6 . Biorąc pod uwagę, że w grupie każda komórka łączy się średnio ze stu innymi, daje to 10^7 połączeń w obrębie grupy.

W świetle powyższych uwag można by próbować interpretować deterministyczny model sieci przedstawiony uprzednio, jak wspomnianą w ostatnim punkcie grupę (kolumnę neuronów). Przy tym, z uwagi na fakt kodowania częstotliwościowego, symbol „1” na wyjściu neuronu formalnego należałoby interpretować jako znak: neuron wzbudzony = neuron rozkładający się z dużą częstotliwością, zaś „0” jako znak: neuron niewzbudzony = neuron generujący tylko impulsy spontanicznie z niską częstotliwością.

Zauważmy, że jest to istotne uproszczenie rzeczywistych funkcji neuronu. W rzeczywistości, neuron może generować impulsy, których częstotliwość zmienia się w szerokim zakresie, w zależności od wielkości pobudzenia. W niektórych modelach przyjmuje się (por. np. [11]) liniową zależność częstotliwości generowanych impulsów od wielkości pobudzenia w obszarze ponadprogowym i jako model neuronu rozpatruje się przetwornik częstotliwości.

Wprowadzone wielkości w_{ij} - wagi synaptyczne neuronu formalnego - mogą być interpretowane jako miary efektywności poszczególnych połączeń synaptycznych, przy czym $w_{ij} < 0$ oznacza, że mamy do czynienia z synapsą hamującą. Wielkości h_i w oczywisty sposób charakteryzują wielkość progu neuronu, tzn. wielkość minimalnego pobudzenia niezbędnego do wzbudzenia neuronu. Ponadto wielkość $\sigma(x)$ może być interpretowana jako średnie wzbudzenie danego fragmentu kory mózgowej.

Znając dzięki równaniu (2.7) zachowanie się w czasie tak określonej grupy neuronów można by próbować badać kompleksy wzajemnie połączonych takich sieci. Jest jednak przyczyna, dla której podejście takie nie jest efektywne. Otóż, równania opisujące zachowanie się w czasie sieci deterministycznej wymagają znajomości dokładnej struktury sieci, a więc wszystkich $N^2 + N$ parametrów cechujących sieć. Jest to - wobec ilości neuronów wchodzących w grę - rzecz nie-

możliwa do spełnienia. Dane doświadczalne, które są możliwe w tym przypadku do osiągnięcia, to raczej dane statystyczna, dotyczące rozkładów wielkości parametrów cechujących sieć, ilości synaps na poszczególnych neuronach itp. (por. np. [12]). Stąd też potrzeba zbudowania modelu umożliwiającego wykorzystanie właśnie danych tego rodzaju.

4. STOCHASTYCZNE SIECI NEURONOWE

Przejdziemy obecnie do przedstawienia etochastycznego modelu sieci neuronowej, spełniającego warunek podany w zakończeniu poprzedniego rozdziału. Jak powiedzieliśmy, chodzi o sformułowanie takiego sposobu opisu sieci, który nie wymagałby dokładnej znajomości wszystkich parametrów cechujących sieć. Przypomina to do pewnego stopnia sytuację w fizyce statystycznej, gdzie dla opisu zachowania się bardzo dużej ilości cząstek, nie wymaga się dokładnej znajomości pędu i położenia każdej cząstki z osobna. Problem takiego opisu sieci neuronów formalnych był badany m. in. przez A m a r i e g o [5-7], który zajmował się modelem tzw. sieci losowo powiązanych neuronów (randomly connected neural nets).

Niech Γ będzie wprowadzoną w rozdziale 2, $N^2 + N$ wymiarową przestrzeń parametrów. Każdy punkt $\mathcal{J} \in \Gamma$ zadaje dokładnie sieć N neuronów formalnych, tzn. określa strukturę wzajemnych połączeń, wagi synaptyczne i progi neuronów. Ograniczmy się na razie do sieci izolowanych. Tym samym punkt $\mathcal{J}$ określa również (2.3) operator $T_{\mathcal{J}}$ zmiany stanu sieci. Można powiedzieć – przez analogię do fizyki statystycznej – że punkt $\mathcal{J}$ jest stanem (w tym przypadku – struktury sieci), a przestrzeń Γ przestrzenią stanów struktury. Kontynuując dalej tę analogię, stanem struktury sieci w przypadku, gdy nie znane są dokładne wartości parametrów sieci, nazwiemy miarę probabilistyczną α na σ -algebrze $B(\Gamma)$ podzbiorów borelowskich przestrzeni Γ . $(\Gamma, B(\Gamma), \alpha)$ jest więc przestrzenią probabilistyczną. Model sieci opisywany trójką $(\Gamma, B(\Gamma), \alpha)$ nazywać będziemy stochastyczną siecią neuronową (używamy przymiotnika stochastyczna, gdyż jak się okaże dalej zmiana stanu wyśledowań neuronów w takim modelu jest procesem stochastycznym). Ściśle rzecz biorąc rozważamy w tym przypadku nieskonczony zbiór możliwych N -elementowych sieci (zespół).

Przestrzeń parametrów Γ można utożsamić z przestrzenią R^{N^2+N} (dla prostoty będziemy dalej oznaczać $N^2 + N = n$).

Niech

$$\alpha(dx_1 \dots dx_n) = \rho(x_1 \dots x_n) \cdot dx_1 \dots dx_n,$$

gdzie

$$\rho(x_1 \dots x_n) \geq 0 \quad \text{ i } \quad \int_{R^n} \rho(x_1 \dots x_n) \cdot dx_1 \dots dx_n = 1.$$

Parametry sieci w_{ij} , h_i : $i, j = 1, N^2 + N$ są teraz zmiennymi losowymi:

$$w_{ij}(x_1 \dots x_n) = x_{(i-1)N+j} \quad (4.1)$$

$$h_i(x_1 \dots x_n) = x_{N^2+1}.$$

Zgodnie z tym co powiedzieliśmy uprzednio, niech będą zadane wartości średnie oraz odchylenia standardowe:

$$\begin{aligned} \langle w_{ij} \rangle &= \int_{R^n} \rho(x_1 \dots x_n) \cdot w_{ij}(x_1 \dots x_n) \cdot dx_1 \dots dx_n \\ \langle h_i \rangle &= \int_{R^n} \rho(x_1 \dots x_n) h_i(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\sigma_{ij} = \langle w_{ij}^2 \rangle - \langle w_{ij} \rangle^2, \quad \sigma_i = \langle h_i^2 \rangle - \langle h_i \rangle^2.$$

(Jest zagadnieniem statystycznym estymacja tych wielkości z danych doświadczalnych!). Należy określić teraz miarę probabilistyczną najlepiej oddającą sytuację rzeczywistą na podstawie znanych średnich i odchyłeń kwadratowych. Zgodnie z zasadą maximum niepewności, rozkładem prawdopodobieństwa najlepiej odpowiadającym naszej wiedzy jest w tym przypadku rozkład Gaussa, [17]. Zakładając, że zmienne losowe (4.1) są niezależne, otrzymamy:

$$x_1 \dots x_n = \frac{1}{\prod_{i,j} \sigma_{ij} \prod_k \sigma_k (\sqrt{2\pi})^n} \exp \left(- \sum_{i,j=1}^N \frac{(x_{(i-1)N+j} - \langle w_{ij} \rangle)^2}{2 \sigma_{ij}^2} - \sum_{k=1}^N \frac{(x_{N^2+k} - \langle h_k \rangle)^2}{2 \sigma_k^2} \right).$$

Odpowiednie rozkłady prawdopodobieństwa dla w_{ij} , wynoszą:

$$\rho(w_{ij}) = \frac{1}{\sigma_{ij} \sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{(\omega_{ij} - \langle \omega_{ij} \rangle)^2}{2 \sigma_{ij}^2} \right).$$

Analogiczną postać ma rozkład h_i .

Tak więc pokazaliśmy, że dla opisu sieci neuronowej przy zadanych wartościach średnich i odchyleniach standardowych parametrów sieci, parametry te (przy założeniu niezależności) opisywane są rozkładami normalnymi.

A m a r i w pracach [5-7] postulując rozkłady normalne dla parametrów sieci oraz zakładając, że rozkłady są jednakowe dla wszystkich neuronów, otrzymał m. in. następujące rezultaty:

1. Zachowanie się w czasie poziomu aktywności $\mathcal{A}$ dane jest formułą:

$$\mathcal{A}(t) = \Phi(\omega \mathcal{A}(t) - \mathcal{H}),$$

gdzie $\omega, \mathcal{H}$ są parametrami zależnymi od ilości neuronów oraz od średnich parametrów sieci, zaś $\Phi(u) = \int_0^u \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv$.

2. W zależności od wartości parametrów $\omega, \mathcal{H}$ zachowanie się w czasie poziomu aktywności $\mathcal{A}$ może być monostabilne, bistabilne lub oscylacyjne.

3. Sieć złożona z wielu połączonych sieci opisanych równaniem (3.3) zachowuje się dla dużych wartości jak sieć deterministyczna neuronów formalnych.

5. SIECI STOCHASTYCZNE A AUTOMATY

Opisany w poprzednim rozdziale model stochastyczny sieci neuronowej chcielibyśmy interpretować jako model kolumny neuronów w korze mózgowej, wspomnianej w rozdziale 3, punkt 4. Wydaje się jednak że ograniczenie się do opisu poziomu aktywności neuronów w takiej grupie jest niewystarczające. Z rezultatów uzyskanych przez A m a r i e g o wynika bowiem, że taka sieć, rozpatrywana pod kątem poziomu aktywności działa na ogół na zasadzie „wszystko lub nic”, tzn. reaguje dużą wartością $\mathcal{A}$ na odpowiednio duże pobudzenie. Tymczasem z punktu widzenia współdziałania poszczególnych grup neuronów w ramach bardziej złożonej struktury oraz z punktu widzenia procesów informacyjnych zachodzących w takiej strukturze, istotne jest poz-

nanie zależności wzorców wyładowań neuronów wyjściowych takiej sieci w funkcji wzorców na wejściu. Można uważać, że wzorce wyładowań pojawiające się na wyjściach kolumnowych struktur kory mózgowej są właśnie swoistym językiem mózgu, czy raczej pojedynczymi słowami tego języka (por. [1]). Dlatego też zajmiemy się teraz opisem poziomu czynnościowego stochastycznej sieci neuronowej. Rozważmy najpierw sieć izolowaną. Jak powiedzieliśmy sieć taka jest zadana za pomocą przestrzeni probabilistycznej $(\Gamma, B(\Gamma), \alpha)$. Wykażemy, że opis takiej sieci można zastąpić opisem automatu probabilistycznego.

Automat probabilistyczny różni się od zdefiniowanego w rozdziale 2 automatu skończonego tym, że macierz przejść jest macierzą stochastyczną, tzn. macierzą $P = (p_{ij})$ taką, że $\sum_j p_{ij} = 1, p_{ij} \geq 0$, [13, 14].

W macierzy przejść dla automatu skończonego występowały tylko zero i jedynki, przy czym w każdym wierszu znajdowała się dokładnie jedna jedynka. Był to więc szczególny przypadek macierzy stochastycznej. Rozważmy dwa stany $x_i, x_j \in X$.

Niech

$$p_{ij}(y) := \alpha(\{x \in \Gamma : \delta(x_i, y) = x_j\}). \quad (5.1)$$

Jak widać $p_{ij}(y)$ są prawdopodobieństwami przejść stanów dla sieci stochastycznej zadanej przez $(\Gamma, B(\Gamma), \alpha)$. Ponieważ $0 \leq p_{ij} \leq 1$ oraz jak łatwo sprawdzić $\sum_j p_{ij}(y) = 1$ tworzą one macierz stochastyczną. A zatem w świetle przytoczonej wyżej definicji sieć stochastyczną można traktować jako automat probabilistyczny. Jest to wniosek o tyle ważny, że stosunkowo młoda teoria automatów probabilistycznych, a zwłaszcza ich oddziaływań w środowiskach losowych (por. [13]), wydaje się być szczególnie dogodnym - acz stosunkowo mało wykorzystywanym - narzędziem modelowania struktur nerwowych.

Zgodnie z tym co powiedzieliśmy dotychczas w przypadku sieci stochastycznej zamiast mówić o dokładnym stanie sieci x w chwili t , można mówić jedynie o rozkładzie prawdopodobieństw stanów $x_1, \dots, x_2$, w danej chwili. Jeżeli prawdopodobieństwo stanu x_i w chwili t oznaczmy przez $p_i(t)$, to w chwili $t + 1$ rozkład prawdopodobieństw dany jest przez:

$$p_i(t+1) = \sum_j p_{ji}(y) p_j(t). \quad (5.2)$$

Wartość średnia wzbudzenia (2.11) w chwili t wynosi:

$$\langle \mathcal{A} \rangle(t) = \sum_i p_i(t) \mathcal{A}(x_i). \quad (5.3)$$

Jak widać zmiana stanu w czasie opisywana jest skończonym łańcuchem Markowa. Wzory (5.2) i (5.3) są słuszne przy założeniu, że stan wejścia y nie zmienia się w czasie. Załóżmy teraz, że w każdej chwili czasu na wejściu sieci pojawia się z prawdopodobieństwem q_k wejście $y_k \in Y$, $k = 1 \dots 2^M$, oraz że prawdopodobieństwa q_k nie zmieniają się w czasie. Oczywiście $\sum_k q_k = 1$. Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu x_i do stanu x_j wyraża się wzorem:

$$p_{ij} = \sum_k q_k p_{ij}(y_k). \quad (5.4)$$

Łatwo sprawdzić, że $\sum_j p_{ij} = 1$, więc (p_{ij}) jest macierzą stochastyczną. Tak więc również w przypadku, gdy otoczenie działa na sieć bodźcami o stałym rozkładzie prawdopodobieństwa, zachowanie się stanu sieci opisane jest łańcuchem Markowa. Prawdopodobieństwa stanów $p_i(t)$ zmieniają się zgodnie z równaniem:

$$p_i(t+1) = \sum_j p_{ji} p_j(t). \quad (5.5)$$

Przyjeliśmy milcząco założenie, że stan wyjścia nie wpływa na stan wejścia, czyli że działanie sieci nie zmienia jej środowiska. Jest to więc szczególny przypadek tzw. środowiska stacjonarnego (por. [13]). Na ogół można założyć też (por. [13]), że dla rozpatrywanego łańcucha Markowa istnieje rozkład finalny (stacjonarny) prawdopodobieństw stanów x_i , tzn. że po długim czasie ustaleją się stałe prawdopodobieństwa p_i stanów x_i . Prawdopodobieństwa te są rozwiązaniem układu równań (por. [15]):

$$p_j = \sum_k p_k p_{kj}, \quad j=1, \dots, 2^N,$$

oznacza to, że po dostatecznie długim okresie czasu również wartość średnia aktywności $\langle \mathcal{A} \rangle$ ustali się na stałym poziomie $\langle \mathcal{A} \rangle_s$.

$$\langle \mathcal{A} \rangle(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \langle \mathcal{A} \rangle_s. \quad (5.6)$$

6. UWAGI KOŃCOWE

Z tego co powiedzieliśmy na temat stochastycznego modelu sieci neuronowej wynika, że może być on traktowany jak automet probabilistyczny, co tym samym umożliwia skorzystanie z interesujących wyników teorii takich automatów. Stwierdzenie to jest uogólnieniem twierdzenia A r b i b a o automatach skończonych (por. rozdz.[2].

Zwróćmy teraz uwagę na dwie interesujące własności omawianego modelu (zagadnienia te szerzej są omówione w pracy [16]). Przede wszystkim w modelu można wyraźnie wyróżnić dwa poziomy: poziom strukturalny (sieci) oraz poziom funkcjonalny, czynnościowy, przy czym funkcjonowanie drugiego z nich (przejścia stanów, reakcja na sygnał zewnętrzny) jest zdeterminowane przez stan pierwszego, por. wzory (5.1), (5.2), (5.5). Zakładaliśmy, że struktura sieci charakteryzowana przez miarę probabilistyczną α pozostaje stała. W ogólności jednak tak nie jest, a wprost przeciwnie, zmiany mikrostrukturalne są podstawą procesów uczenia się i pamięci długoterminowej. Zmiany te są jednak bardzo powolne w porównaniu ze zmianami stanów sieci. Układ o takich właściwościach nazywa się układem adaptacyjnym (por. rozdz. 2).

Zajmijmy się teraz interpretacją wzoru (5.6). Jak stwierdziliśmy, jeżeli struktura probabilistyczna wejścia pozostaje stała, to po pewnym czasie ustala się pewien stały, średni poziom aktywności neuronów, $\langle \alpha \rangle_s$. Może on ulec zmianie tylko wtedy, gdy ulegnie zmianie rozkład prawdopodobieństw sygnałów wejściowych. Innymi słowy, jeżeli sygnały wejściowe interpretować jako bodźce pochodzące od włókien eferentnych kończących się w danej kolumnie neuronów kory - zmiana aktywności nastąpi wtedy, gdy ulegnie zmianie jakiś element struktury otoczenia. Zjawisko takie jest znane w neurofizjologii (por. [1, 8]).

Kolejnym krokiem w badaniu stochastycznego modelu sieci powinna być analiza sieci stochastycznej jako układu przetwarzającego informację, a następnie zbadanie zjawisk zachodzących w układach wzajemnie połączonych sieci. Byłby to model zjawisk zachodzących w korze mózgowej. Są bowiem przesłanki (por. [1]) pozwalające sądzić, że zjawiska, takie jak pamięć krótkoterminowa, kojarzenie, uczenie się związane są z wzajemnymi oddziaływaniami grup neuronów (kolumn) w korze mózgowej. Zagadnieniom tym poświęcona jest praca autora [16].

Panu Prof. R. S. Ingardenowi za zainteresowanie mnie tym tematem oraz życzliwą opiekę dziękuję.

Maszynopis wpłynął do Redakcji 7 X 1980

LITERATURA

- [1] Eccles J. C., The Understanding of the Brain, Mc Graw-Hill, New York 1973.
- [2] Harmon L. D., Physiological Review, 46 513, (1966).
- [3] McCulloch W. S., Pitts W. H., Bull Math. Biophys, 5 115 (1943).
- [4] Uscherwood P. N. R., Układ nerwowy, PWN, Warszawa 1976.
- [5] Amari S. I., Adran. in Biophys., 6, 75, (1974).
- [6] Amari S. I., A Mathematical Approach to Neural Systems [w:] Systems Neuroscience, ed. J. Metzler, Academic Press, New York 1977.
- [7] Amari S. I., Biol. Cybernetics, 26, 175, (1977).
- [8] Arbib M. A., Mózg i jego modele, PWN, Warszawa 1977.
- [9] Arbib M. A., Mózg, maszyna, matematyka, PWN Warszawa 1968.
- [10] Kohonen T., Associative Memory, Springer-Verlag, 1978, przekł. ros.
- [11] Deutsch S., Models of the Nervous System, J. Wiley & Sons Inc., 1967.
- [12] Schade J. P., van Backer H., Colon E., Neuronal Parameters of the Cortex w: Growth and Maturation of the Brain Progress in Brain Research vol. 4, Elsevier, Amsterdam 1964.
- [13] Cetlin M. L., Issl'edovaniya po t'eorii avtomatov i modelirovaniyu biologicheskikh sist'em, Nauka, Moskwa 1969.
- [14] Pospiełow D. A., Automaty probabilistyczne, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1972.
- [15] Borowkow A. A., Rachunek prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1977.
- [16] Daniel W., Teoria informacji e modelowanie sieci neuronowych, w druku.
- [17] Guisau S., Information Theory with Applications, Mc Graw-Hill, Inc., London 1977.

Wojciech Daniel

INFORMATION THEORY AND MODELING OF NEURONAL NETWORK I. STOCHASTIC MODEL OF NEURONAL NETWORK

Summary

In this paper, basing on electrophysiological data, the mathematical model of neuronal network is proposed. This model may provide a basis for the formulation of the theory of information processes in brain. It is concluded that stochastic network may be considered as an probabilistic automat.

mgr WOJCIECH DANIEL
Instytut Fizyki
Uniwersytetu M. Kopernika
ul. Grudziądzka 5
87-100 Toruń